POLITECNICO
MILANO 1863

Elettromagnetismo

Elettricità. Corrente. Magnetismo

Maurizio Zani

Sommario

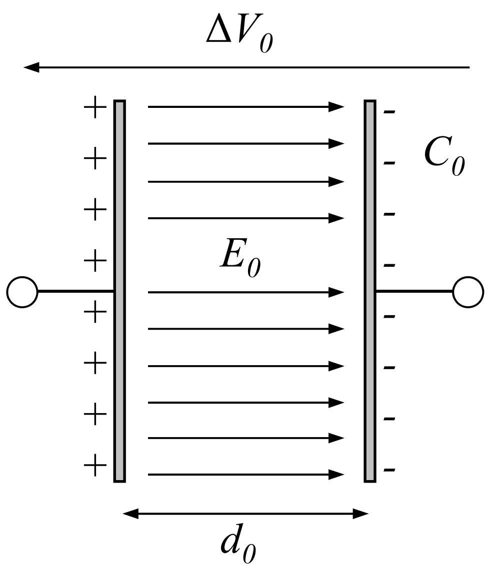
Elettromagnetismo

http://www.mauriziozani.it/wp/?p=1128

Elettromagnetismo

Materiali dielettrici: condensatore piano

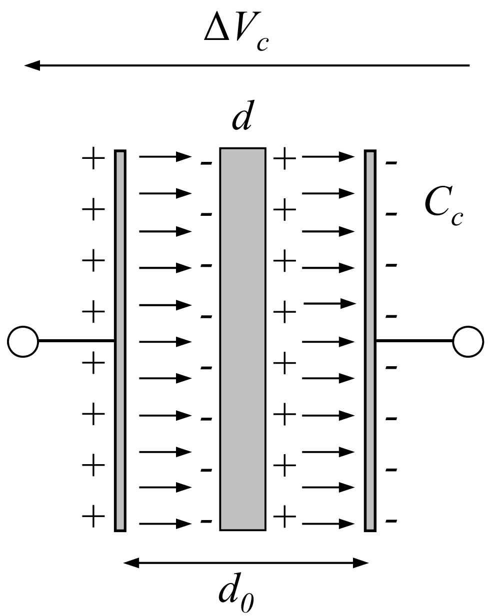
$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ all'interno del condensatore



$$\Delta V_0 = E_0 d_0$$

$$C_0 = \frac{q}{\Delta V_0} = \varepsilon_0 \frac{S}{d_0}$$

Materiali dielettrici: condensatore con lastra conduttrice

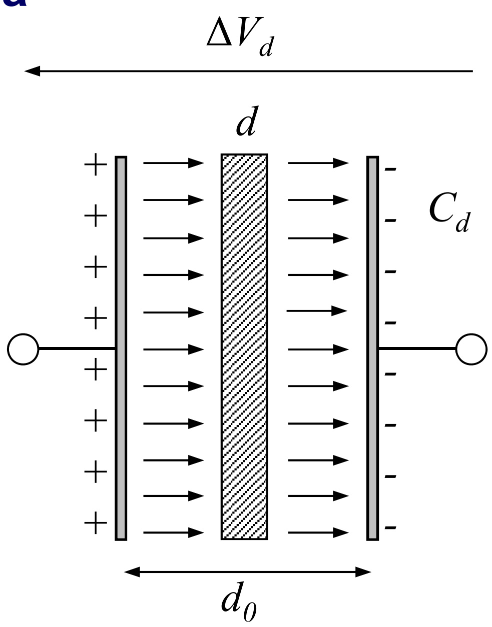


$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ nello spazio vuoto all'interno del condensatore

$$\Delta V_c = E_0\left(d_0 - d\right) < \Delta V_0 = E_0 d_0$$

$$C_c = \frac{q}{\Delta V_c} > \frac{q}{\Delta V_0} = C_0$$

Materiali dielettrici: condensatore con lastra dielettrica



se la lastra riempie <u>completamente</u> lo spazio vuoto...

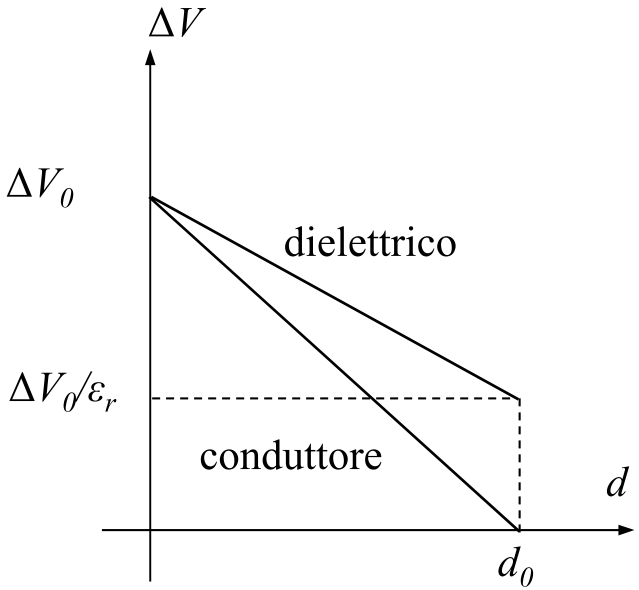
$$E_d = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$$\Delta V_d = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r}$$

$$C_d = \frac{q}{\Delta V_d} = \frac{q}{\Delta V_0 / \varepsilon_r} = \varepsilon_r \frac{q}{\Delta V_0} = \varepsilon_r C_0 > C_0$$

permittività elettrica relativa

Materiali dielettrici

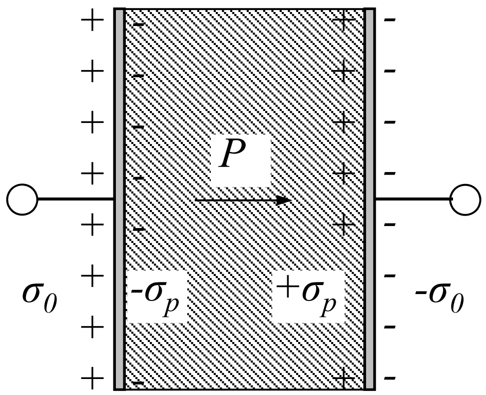


Solidi	ε_r	Liquidi	ε_r	Gas	ε_r
Ambra	2.7	Acqua distillata	80	Aria	1
Carta	3.7	Alcool etilico	28		
Polistirolo	2.6	Benzene	2.3		
Porcellana	6.5	Etanolo	28		
Vetro pyrex	5.6				

Polarizzazione: induzione elettrica

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = n\vec{p}_0$$

polarizzazione



$$P = \frac{p}{V} = \frac{q_p d}{V} = \frac{q_p d}{Sd} = \frac{q_p}{S} = \sigma_p$$

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E + \sigma_p = \varepsilon_0 E + P = D$$

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\varepsilon_0}$$

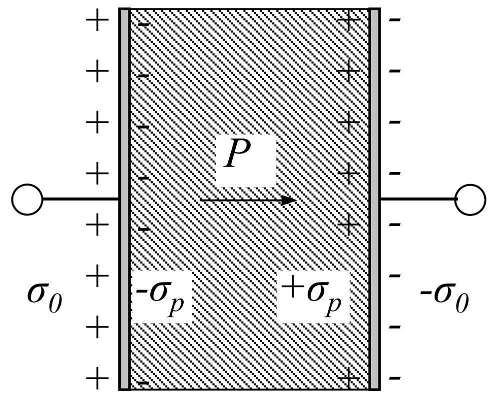
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

induzione elettrica

Polarizzazione

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = n\vec{p}_0$$

polarizzazione



$$P = \frac{p}{V} = \frac{q_p d}{V} = \frac{q_p d}{Sd} = \frac{q_p}{S} = \sigma_p$$

$$\sigma_p = \sigma_0 - \varepsilon_0 E$$

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\varepsilon_0}$$

visione microscopica

visione macroscopica

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right) \vec{E}$$

suscettività elet.

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1$$

Polarizzazione

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1 \right) \vec{E}$$

- scalare: omogeneo e lineare
- tensore: non isotropo $\quad \underline{\underline{\varepsilon_r}} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{Vmatrix}$
- dispersione: pulsazione $\quad \varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$
- numero complesso: ritardo di fase $\quad \tilde{\varepsilon}_r = \mathrm{Re}(\tilde{\varepsilon}_r) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(\tilde{\varepsilon}_r)$
- altri termini: ordine superiore $\quad P = \varepsilon_0 \left(\chi_e^{(1)} E + \chi_e^{(2)} E^2 + \chi_e^{(3)} E^3 + \ldots \right)$

Formulazione differenziale: polarizzazione

polarizzazione omogenea

$$\sigma_p = P \qquad \sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{u}_n \qquad q_{p\,sup} = \int \sigma_p \mathrm{d}S = \int \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

polarizzazione <u>non</u> omogenea

$$q_{p\,vol} = \int \rho_p \mathrm{d}V = -q_{p\,sup} = -\oint \sigma_p \mathrm{d}S = -\oint \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\int \mathrm{div}\left(\vec{P}\right)\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{div}\left(\vec{P}\right) = -\rho_p \quad \Rightarrow \quad \Delta P_n = -\sigma_p$$

Formulazione differenziale: induzione elettrica

$$\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

$$\rho_l = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) - \rho_p = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) + \mathrm{div}\left(\vec{P}\right) = \mathrm{div}\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \mathrm{div}\left(\vec{D}\right)$$

$$\mathrm{div}\left(\vec{D}\right) = \rho_l \quad \Rightarrow \quad \Delta D_n = \sigma_l$$

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E}\right) = \mathrm{rot}\left(\frac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0}\right) = 0$$

$$\mathrm{rot}\left(\vec{D}\right) = \mathrm{rot}\left(\vec{P}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta D_t = \Delta P_t$$

Formulazione differenziale

	Teorema di Gauss	Campo conservativo
relazioni integrali	$\Phi\left(\vec{P}\right) = \oint \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -q_p$	
condizioni al contorno	$\Delta P_n = -\sigma_p$	
relazioni infinitesime	$\mathrm{div}\left(\vec{P}\right) = -\rho_p$	
relazioni integrali	$\Phi\left(\vec{D}\right) = \oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_l$	$\Lambda\left(\vec{D}\right) = \Lambda\left(\vec{P}\right)$
condizioni al contorno	$\Delta D_n = \sigma_l$	$\Delta D_t = \Delta P_t$
relazioni infinitesime	$\mathrm{div}\left(\vec{D}\right) = \rho_l$	$\mathrm{rot}\left(\vec{E}\right) = 0$

Formulazione differenziale: energia elettrica

$$\mathrm{div}\left(\vec{D}\right) = \rho_{lib} \qquad \mathrm{div}\left(f\vec{A}\right) = f\,\mathrm{div}\left(\vec{A}\right) + \vec{A}\cdot\mathrm{grad}\left(f\right) \qquad \vec{E} = -\,\mathrm{grad}\left(V\right)$$

$$\rho_{lib}V = V\,\mathrm{div}\left(\vec{D}\right) = \mathrm{div}\left(V\vec{D}\right) - \vec{D}\cdot\mathrm{grad}\left(V\right) = \mathrm{div}\left(V\vec{D}\right) - \vec{D}\cdot\vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2}\int \rho_{lib}V\,\mathrm{d}\tau = \cancel{\frac{1}{2}\int \mathrm{div}\left(V\vec{D}\right)\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau \qquad E_{el} = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\,\mathrm{d}\tau$$

$$\int \mathrm{div}\left(V\vec{D}\right)\mathrm{d}\tau = \int V\vec{D}\,\mathrm{d}S$$

$$VD \propto \frac{1}{r}\frac{1}{r^2} \qquad S \propto r^2$$

$$\rho_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$$

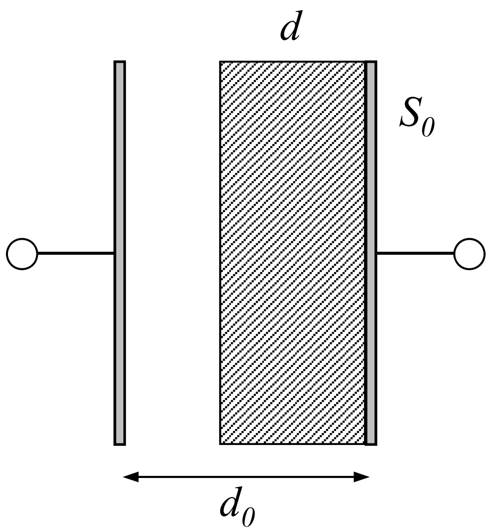
densità di energia elettrica

Condensatori

e se la lastra riempie parzialmente lo spazio vuoto?

$$C = \varepsilon_0 \frac{S_0}{d_0 - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) d}$$

condensatori in serie



$$C = \varepsilon_0 \frac{S_0 + S\left(\varepsilon_r - 1\right)}{d_0}$$

condensatori in parallelo