POLITECNICO
MILANO 1863

Onde

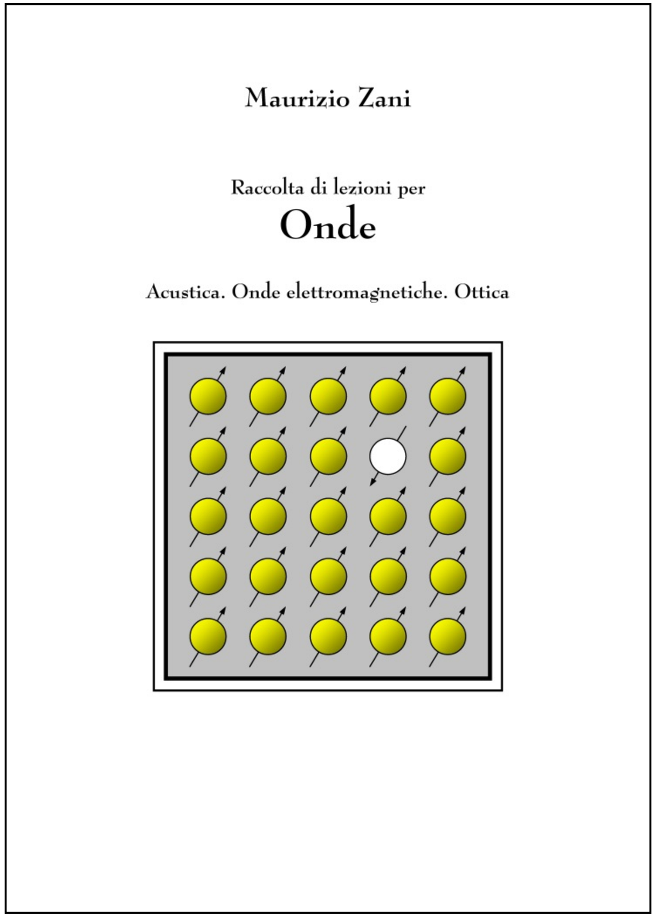
Acustica. Onde elettromagnetiche. Ottica

Maurizio Zani

Sommario

Onde

[Onde]
[Onde meccaniche]
[Onde elettromagnetiche]
[Emissione e interazione elettromagnetica]
[Ottica geometrica]
[Ottica ondulatoria]
[Ottica quantistica]


Maurizio Zani

Raccolta di lezioni per
Onde

Acustica. Onde elettromagnetiche. Ottica

http://www.mauriziozani.it/wp/?p=2916

Onde

Onde
Onde meccaniche
Onde elettromagnetiche
Emissione e interazione elettromagnetica
Ottica geometrica
Ottica ondulatoria
Ottica quantistica

Onde elettromagnetiche
Onde elettromagnetiche piane
Onde elettromagnetiche piane armoniche
Onde sferiche

Onde elettromagnetiche

emissione

↓

propagazione

↓

interazione

- superficie
- volume
- aperture/ostacoli

Onde elettromagnetiche
- velocità
- indice di rifrazione

Onde elettromagnetiche piane
- direzione
- ampiezze

Onde elettromagnetiche piane armoniche
- energia e intensità
- quantità di moto
- polarizzazione

Onde elettromagnetiche: velocità

senza sorgenti

$$\begin{cases} \text{div}\left(\vec{E}\right) = 0 \\ \text{div}\left(\vec{B}\right) = 0 \\ \text{rot}\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}\left(\vec{B}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

eq. delle onde elettromagnetiche

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

velocità di propagazione

$$\nabla^2\left(\vec{E}\right) = \text{grad}\left(\text{div}\left(\vec{E}\right)\right) - \text{rot}\left(\text{rot}\left(\vec{E}\right)\right)$$

Onde elettromagnetiche: velocità

eq. delle onde elettromagnetiche

nel vuoto

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

in un mezzo

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

indice di rifrazione $n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$

Onde elettromagnetiche piane: direzione e ampiezze

onda omogenea in *xy*

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(z - ct) \\ \vec{B} = \vec{B}(z - ct) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = 0$$

$$\text{div}\left(\vec{E}\right) = \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}} = 0$$

$$\text{rot}\left(\vec{B}\right)\Big|_z = \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial y}} = \mu_0 \varepsilon_0 \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial t}}$$

$$\cancel{E_z ; B_z} \qquad \begin{cases} \vec{E} = \left(E_x ; E_y\right) \\ \vec{B} = \left(B_x ; B_y\right) \end{cases}$$

Onde elettromagnetiche piane: direzione e ampiezze

$$\begin{cases} \begin{cases} E_x = E_x(z - ct) \\ E_y = E_y(z - ct) \end{cases} \\ \\ \begin{cases} B_x = B_x(z - ct) \\ B_y = B_y(z - ct) \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = 0$$

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E}\right)\Big|_x = \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\left(\vec{B}\right)\Big|_x = \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial y}} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

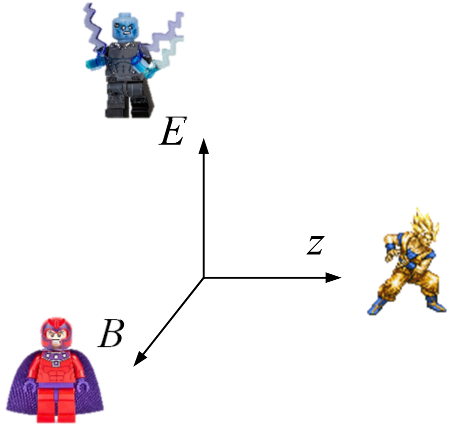
$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = \dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases}$$

$$w = z - ct$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial w} \underbrace{\dfrac{\partial w}{\partial z}}_{1} = \dfrac{\partial B_x}{\partial w} \underbrace{\dfrac{\partial w}{\partial t}}_{-c} \\ \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial w} \underbrace{\dfrac{\partial w}{\partial z}}_{1} = \underbrace{-\mu_0 \varepsilon_0}_{-1/c^2} \dfrac{\partial E_x}{\partial w} \underbrace{\dfrac{\partial w}{\partial t}}_{-c} \end{cases}$$

Onde elettromagnetiche piane: direzione e ampiezze

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial w} = -c\dfrac{\partial B_x}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial B_y}{\partial w} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_x}{\partial w} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_y = -cB_x \\[2ex] E_x = cB_y \end{cases}$$



$$\vec{E}\cdot\vec{B} = E_xB_x + E_yB_y = cB_yB_x - cB_xB_y = 0$$

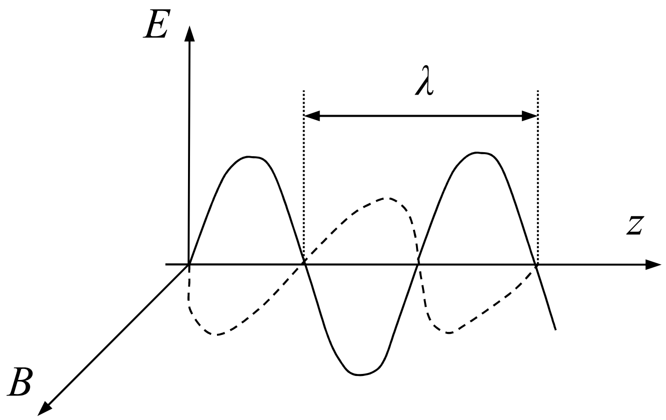
$$\vec{E} \perp \vec{B}$$

$$\vec{u}_E \times \vec{u}_B = \vec{u}_v$$

$$\frac{E}{B} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} = \frac{\sqrt{c^2B_y^2 + c^2B_x^2}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} = c$$

$$E = cB$$

Onde elettromagnetiche piane armoniche



$$\begin{cases} E = E_0 \sin\left[k\left(z - ct\right)\right] = E_0 \sin\left(kz - \omega t\right) \\ B = B_0 \sin\left[k\left(z - ct\right)\right] = B_0 \sin\left(kz - \omega t\right) \end{cases}$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

- ω → **pulsazione**
- λ → **lunghezza d'onda**
- T → **periodo**
- k → **numero d'onda**

Onde elettromagnetiche piane armoniche: energia

$$\begin{cases} \rho_e = \dfrac{dE_e}{dV} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ \rho_m = \dfrac{dE_m}{dV} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mu_0} B^2 \end{cases}$$

densità di energia elettrica

densità di energia magnetica

$$E = cB$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

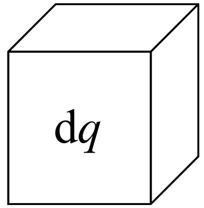
$$\rho_{em} = \frac{dE_{em}}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0} B^2 = \varepsilon_0 E^2$$

densità di energia elettromagnetica ?

Onde elettromagnetiche piane armoniche: energia

forza di Coulomb

forza di Lorentz



$$\mathrm{d}\vec{F}_{tot} = \mathrm{d}\vec{F}_e + \mathrm{d}\vec{F}_m = \mathrm{d}q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

forza di Heaviside

$$\text{đ}W = \mathrm{d}\vec{F}_{tot} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}q\, \vec{E} \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}t = \vec{E} \cdot \vec{J}\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t = \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\left(\vec{B}\right) - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t$$

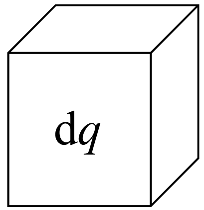
$$\text{đ}W_m = 0$$

$$\vec{J} = n q_0 \vec{v} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \vec{v}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\left(\vec{B}\right) - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Onde elettromagnetiche piane armoniche: energia

$$\frac{đW}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_{mat}}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t} = \vec{E}\cdot\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\left(\vec{B}\right) - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$



$$-\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\left(\vec{B}\right) = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\left(\vec{E}\right) - \frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

Onde elettromagnetiche piane armoniche: energia

$$\frac{\mathrm{d}E_{mat}}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t} = \vec{E}\cdot\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\left(\vec{B}\right) - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{mat}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}V - \oint\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

ρ_e ρ_m

$$\vec{S}_P = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$$

vettore di Poynting

$$\oint\vec{S}_P\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\left(\frac{\mathrm{d}E_{mat}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_{em}}{\mathrm{d}t}\right)$$

teorema di Poynting

Onde elettromagnetiche piane armoniche: intensità

vettore di Poynting

$$\vec{S}_P = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

intensità

$$I = \left|\vec{S}_P\right| = \frac{EB}{\mu_0} = c\varepsilon_0 E^2$$

onda armonica

$$E = E_0 \sin\left(kz - \omega t\right)$$

$$\left\langle S_P \right\rangle = c\varepsilon_0 {E_0}^2 \left\langle \sin^2\left(kz - \omega t\right)\right\rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 {E_0}^2$$

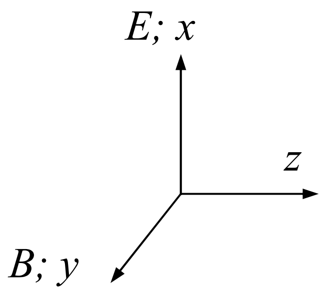
$$\left\langle I_0 \right\rangle = \left\langle S_P \right\rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 {E_0}^2$$

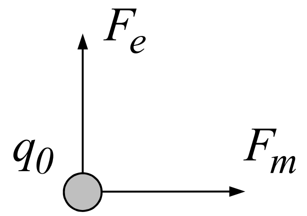
nel vuoto

$$\left\langle I \right\rangle = \left\langle S_P \right\rangle = \frac{1}{2} v\varepsilon {E_0}^2 = \frac{1}{2}\frac{c}{n}\varepsilon_0 n^2 {E_0}^2 = n\left\langle I_0 \right\rangle$$

in un materiale

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q_0\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$





$$\begin{cases} W = \int \vec{F}_e\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^T q_0\vec{E}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = \int_0^T q_0E_xv_x\mathrm{d}t = \Delta E \\ \Delta Q_z = \int F_z\mathrm{d}t = \int_0^T q_0v_xB_y\mathrm{d}t = \int_0^T q_0v_x\frac{E_x}{c}\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_0^T q_0v_xE_x\mathrm{d}t = \frac{\Delta E}{c} \end{cases}$$

$$\Delta Q = \frac{\Delta E}{c}$$

Onde elettromagnetiche piane armoniche: quantità di moto

energia

$$E = hf$$

quantità di moto

$$Q = \frac{h}{\lambda}$$

$$\Delta Q = \frac{\Delta E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Onde elettromagnetiche piane armoniche: quantità di moto

pressione di radiazione

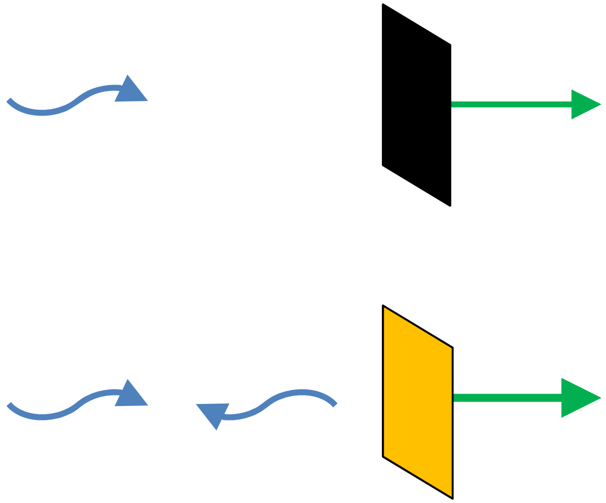
$$p = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}E}{c\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{A\,\mathrm{d}t} = \frac{I}{c}$$

$$\langle p \rangle = \frac{\langle I \rangle}{c} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 {E_0}^2$$

onda e.m. superficie

perfettamente assorbente $p = \frac{I}{c}$ → $p = \frac{I}{c}$

perfettamente riflettente $p = \frac{I}{c}$ → $p = 2\frac{I}{c}$

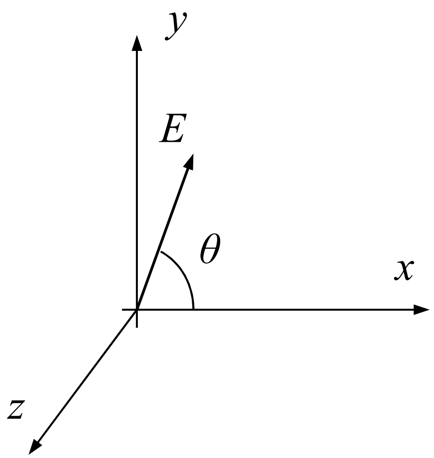


Onde elettromagnetiche piane armoniche: polarizzazione

piano di oscillazione

$\vec{u}_E ; \vec{u}_v$

- nel piano *xy*
- asse *z*



inclinazione θ

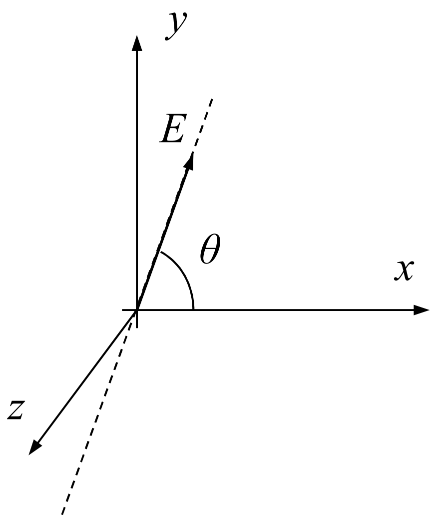
- **polarizzazione lineare**: θ = costante
- **polarizzazione ellittica**: $\theta = kt$
  - **polarizzazione circolare**: E = costante

Onde elettromagnetiche piane armoniche: polarizzazione

polarizzazione lineare

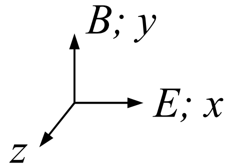
$$\vec{E} = E_{0x} \sin(kz - \omega t)\vec{u}_x + E_{0y} \sin(kz - \omega t)\vec{u}_y$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \arctan\left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)$$

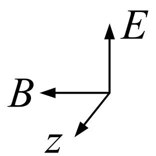


se $\theta = 0$ $\begin{cases} \vec{E} = E_0 \sin(kz - \omega t)\vec{u}_x \\ \vec{B} = B_0 \sin(kz - \omega t)\vec{u}_y \end{cases}$

se $\theta = \pi/2$ $\begin{cases} \vec{E} = E_0 \sin(kz - \omega t)\vec{u}_y \\ \vec{B} = -B_0 \sin(kz - \omega t)\vec{u}_x \end{cases}$



$$\vec{u}_E \times \vec{u}_B = \vec{u}_v$$

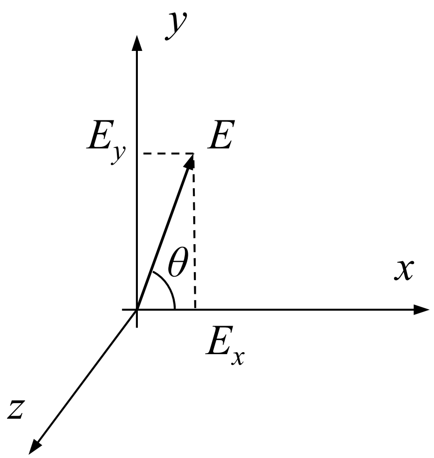


Onde elettromagnetiche piane armoniche: polarizzazione

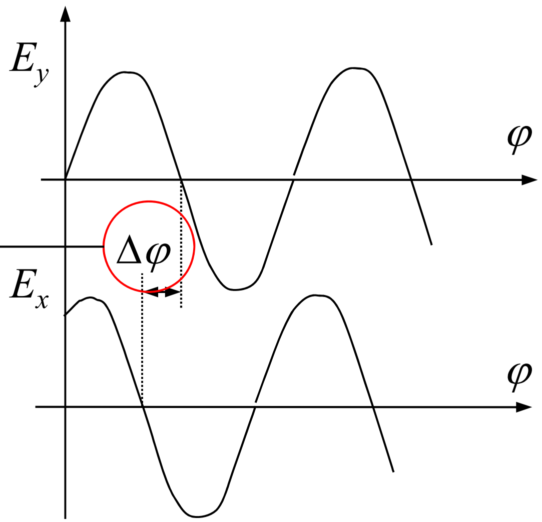
combinazione di due onde
polarizzate linearmente & stessa pulsazione

$$\vec{E} = E_{0x}\sin\left(kz - \omega t + \varphi_x\right)\vec{u}_x + E_{0y}\sin\left(kz - \omega t + \varphi_y\right)\vec{u}_y$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right)$$



$$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

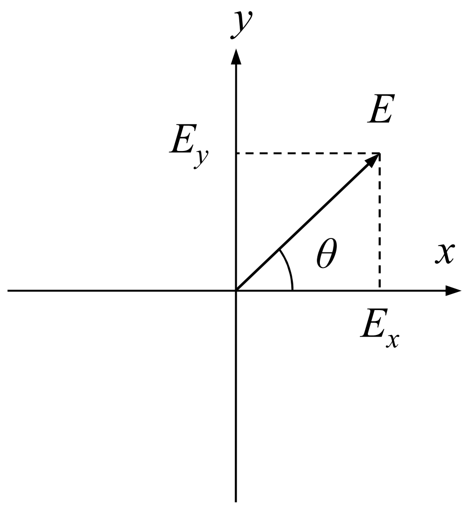


differenza di fase

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta z}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T}$$

Onde elettromagnetiche piane armoniche: polarizzazione

$$\vec{E} = E_{0x} \sin\left(kz - \omega t + \varphi_x\right)\vec{u}_x + E_{0y} \sin\left(kz - \omega t + \varphi_y\right)\vec{u}_y$$



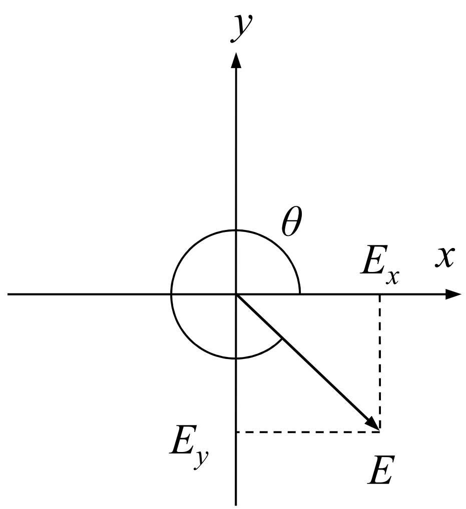
$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$

$\Delta\varphi = 0$ **polarizz. lineare**

$\theta = \text{costante}\ (> 0)$

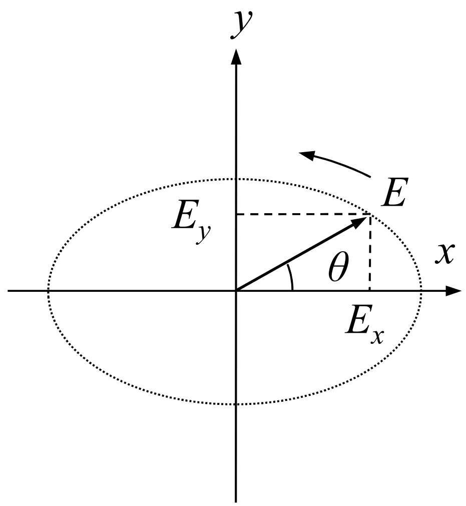
$\Delta\varphi = \pi$ **polarizz. lineare**

$\theta = \text{costante}\ (< 0)$



Onde elettromagnetiche piane armoniche: polarizzazione

$$\vec{E} = E_{0x} \sin\left(kz - \omega t + \varphi_x\right)\vec{u}_x + E_{0y} \sin\left(kz - \omega t + \varphi_y\right)\vec{u}_y$$



$$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

$\Delta\varphi = \pi / 2$ **polarizz. ellittica oraria***

$$\theta = kt$$

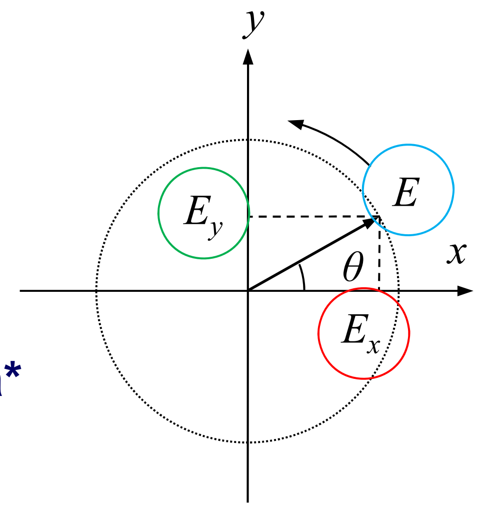
$\Delta\varphi = -\pi / 2$ **polarizz. ellittica anti-oraria**

$$\theta = -kt$$

* o destra; onda osservata lungo il verso di propagazione

Onde elettromagnetiche piane armoniche: polarizzazione

$$\vec{E} = E_{0x} \sin\left(kz - \omega t + \varphi_x\right)\vec{u}_x + E_{0y} \sin\left(kz - \omega t + \varphi_y\right)\vec{u}_y$$



$$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

$$E_{0x} = E_{0y}$$

$\Delta\varphi = \pi / 2$ **polarizz. circolare oraria***

$$\theta = kt$$

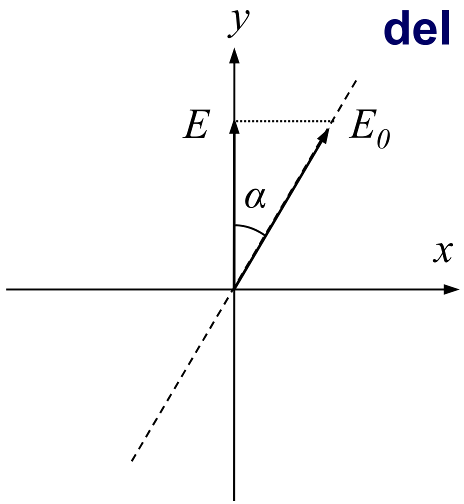
$\Delta\varphi = -\pi / 2$ **polarizz. circolare anti-oraria**

$$\theta = -kt$$

* o destra; onda osservata lungo il verso di propagazione

asse del polarizzatore

direzione del campo E



polarizzazione lineare

$$\langle I_{in} \rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^{\;2}$$

$$\langle I_{out} \rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 \left(E_0 \cos(\alpha) \right)^2 = \langle I_{in} \rangle \cos^2(\alpha)$$

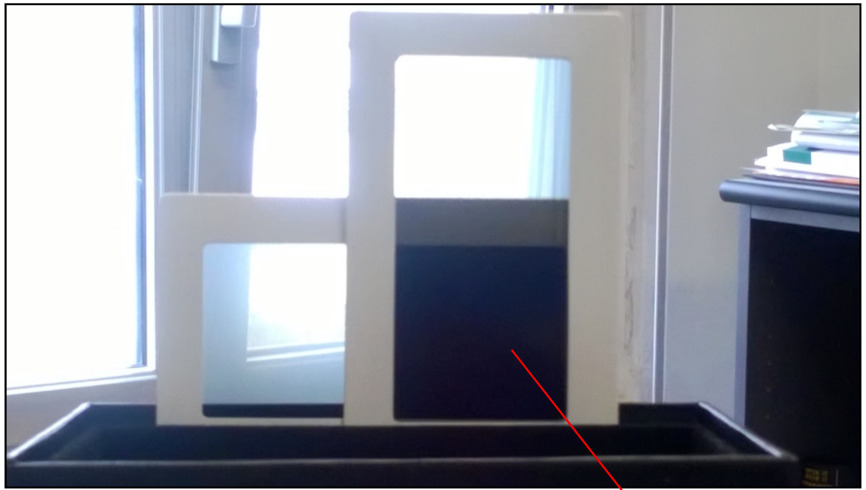
legge di Malus

Polaroid

Onde elettromagnetiche piane armoniche: polarizzatore

2 polarizzatori ortogonali

2 polarizzatori ortogonali
con interposto 1 obliquo



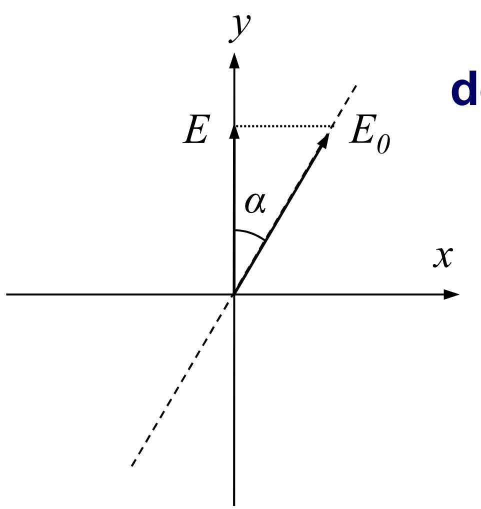
intensità nulla

intensità nulla

intensità non nulla!

Onde elettromagnetiche piane armoniche: polarizzatore

asse del polarizzatore



direzione del campo E

polarizzazione circolare

$$\langle I_{in} \rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0{}^2 = \langle I_{in\,x} \rangle + \langle I_{in\,y} \rangle = 2\langle I_{in\,y} \rangle$$

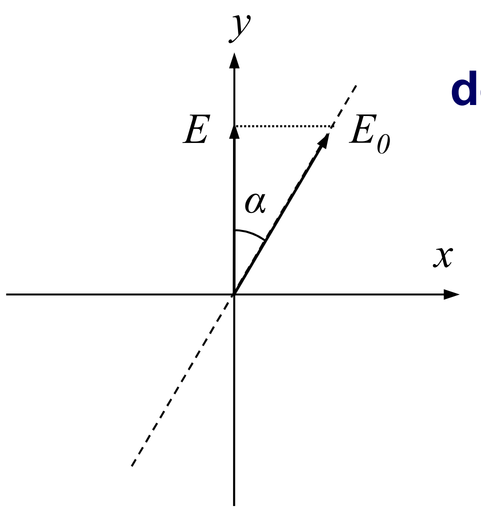
$$\langle I_{out} \rangle = \langle I_{in\,y} \rangle = \frac{1}{2}\langle I_{in} \rangle$$

temporalmente

Onde elettromagnetiche piane armoniche: polarizzatore

asse del polarizzatore

direzione del campo E



luce non polarizzata

$$\langle I_{in} \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^{\,2} = \langle I_{in\,x} \rangle + \langle I_{in\,y} \rangle = 2 \langle I_{in\,y} \rangle$$

statisticamente

$$\langle I_{out} \rangle = \langle I_{in\,y} \rangle = \frac{1}{2} \langle I_{in} \rangle$$